

COURS D'ANALYSE

Laurent Schwartz

Professeur à l'Ecole Polytechnique
et à la Faculté des Sciences de Paris

Analyse

MATHÉMATIQUE

Cours

professé à l'Ecole Polytechnique, Paris

I



Hermann

115 boulevard Saint-Germain Paris VI

© HERMANN, PARIS 1967

Tous droits de reproduction, même fragmentaire, sous quelque forme que ce soit, y compris photographie, photocopie, microfilm, bande magnétique, disque, ou autre, réservés pour tous pays.

Toute reproduction, même partielle, non expressément autorisée, constitue une contrefaçon passible des peines prévues par la loi du 11 mars 1957 sur la protection des droits d'auteur.

TABLE

Chapitre I

THEORIE DES ENSEMBLES

§ 1	<u>ENSEMBLES. OPERATIONS ELEMENTAIRES</u>	3
	Parties d'un ensemble	3
	Relations d'inclusion complémentaires ...	4
	Réunion. Intersection	4
	Ensemble produit	5
§ 2	<u>APPLICATIONS, FONCTIONS</u>	6
	Exemples d'applications	6
	Injections, surjections, bijections	7
	Image directe et image réciproque d'une partie	8
	Ensembles d'applications. Familles, suites	9
	Application composée	10
	Changements de variables et changements de fonctions	11
§ 3	<u>RELATIONS D'EQUIVALENCE, ENSEMBLE QUOTIENT</u>	11
	Classes d'équivalence. Partitions	13
	Ensemble quotient	14

Quotient d'un groupe par un sous-groupe invariant	14
Quotient d'un espace vectoriel par un sous espace vectoriel	15
§ 4 <u>RELATIONS D'ORDRE</u>	16
Exemples de relation d'ordre	17
Parties majorées, majorants, maximum, bor- ne supérieure	19
Fonctions croissantes	20
Droite achevée \mathbb{R}	22
§ 5 <u>PUISSANCES. ENSEMBLES DENOMBRABLES</u>	22
Puissances. Cardinaux	23
Ensembles dénombrables	27
Puissance du continu	29
Nombres transcendants	30
Hypothèse du continu	32
§ 6 <u>QUELQUES PRINCIPES DE LOGIQUE</u>	32

TABLE

Chapitre II

TOPOLOGIE

§ 1	<u>ESPACES METRIQUES. EXEMPLES ELEMENTAIRES</u>	37
	Sphères, boules	38
	Espaces vectoriels normés	39
§ 2	<u>OUVERTS. FERMES. VOISINAGES. INTERIEUR.</u>	
	<u>FRONTIERE. ADHERENCE. SOUS-ENSEMBLE DENSES</u>	41
	Parties ouvertes	41
	Parties fermées	43
	Voisinages	44
	Intérieur	46
	Extérieur	46
	Frontière	46
	Adhérence	47
	Sous-ensembles denses	48
	Sous-espace. Métrique induite	48
§ 3	<u>FONCTIONS CONTINUES. HOMEOMORPHISMES</u>	50
	Homéomorphismes	52
§ 4	<u>ESPACES METRIQUES ET ESPACES TOPOLOGIQUES</u>	54
	Topologie de la droite achevée \mathbb{R}	58

§ 5	<u>SUITES. LIMITES. CONVERGENCES</u>	59
§ 6	<u>TOPOLOGIE PRODUIT</u>	62
	Suites convergentes dans un produit	64
	Fonctions continues de plusieurs variables	64
	Groupes topologiques, espaces vectoriels topologiques	65
	Continuité partielle d'une fonction de deux variables	66
§ 7	<u>ESPACES COMPACTS. PROPRIETES ELEMENTAIRES</u>	67
	Espaces totalement compacts	73
	Point d'accumulation d'une suite	74
	Limite supérieure et limite inférieure d'une suite réelle	78
§ 8	<u>PROPRIETES DES FONCTIONS CONTINUES SUR UN ESPACE COMPACT</u>	78
	Continuité uniforme	85
§ 9	<u>ESPACES CONNEXES</u>	87
	Espaces connexes par arcs	90
§ 10	<u>COMPLEMENTS DE TOPOLOGIE GENERALE SUR LES ESPACES CONNEXES</u>	91
	Quelques applications de la notion de connexité	92
	Existence et continuité de la fonction ré- ciproque d'une fonction strictement monoto- ne continue	92
§ 11	<u>ESPACES METRIQUES COMPLETS</u>	94
	Prolongement des applications uniformément continues	98

	Priorités particulières aux espaces vectoriels topologiques de dimension finie	100
§ 12	<u>THEOREME DU POINT FIXE</u>	101
§ 13	<u>THEORIE ELEMENTAIRE DES ESPACES VECTORIELS NORMES ET DES ESPACES DE BANACH</u>	104
	Noyau et image d'une application linéaire continue	106
	Produits d'espaces vectoriels normés	112
	Applications bilinéaires continues d'un produit d'espace vectoriel normé dans un espace vectoriel normé	114
	Applications multilinéaires continues	119
§ 14	<u>SERIES DANS LES ESPACES VECTORIELS NORMES</u>	120
	Changement d'ordre des termes d'une série	123
	Produit de deux séries numériques. Effet d'une application bilinéaire continue sur deux séries	129
	Critère de semi -convergence	133
§ 15	<u>EXEMPLES USUELS D'ESPACES FONCTIONNELS ; CONVERGENCE SIMPLE ET UNIFORME</u>	137
	Convergence uniforme d'une suite de fonctions	141
	Autres emplois de l'expression : conver- gence uniforme	143
	Espaces faisant intervenir à la fois la structure de E et la structure de F	145
	Séries de fonctions à valeurs dans un es- pace vectoriel normé	151

§ 16	<u>PRODUITS INFINIS DE NOMBRES OU DE FONCTIONS</u>	
	<u>REELS OU COMPLEXES</u>	155
	Produit infini et série des logarithmes	156
	Produits infinis de fonctions réelles ou complexes	159
	Application à la fonction ζ de Riemann	160

TABLE

Chapitre III CALCUL DIFFERENTIEL

§ 1	<u>ESPACES AFFINES</u>	167
	Définition	168
	Variétés affines	169
	Applications linéaires, applications affines ..	170
	Espaces affines normés	172
	Ensembles convexes dans les espaces affines ...	174
	Espaces vectoriels et affines euclidiens	175
	Espaces vectoriels et affines hermitiens	176
	Isomorphisme (ou semi-isomorphisme) d'un espace euclidien (ou hermitien) de dimension fini et de son dual	178
	Bases orthonormales	179
	Espaces euclidiens ou hermitiens généralisés ..	181
§ 2	<u>FONCTIONS REELLES D'UNE VARIABLE REELLE</u> <u>CONTINUITÉ A DROITE, A GAUCHE</u>	184
	Discontinuités de première espèce. Fonctions réglées	184
	Dérivée d'une fonction réelle de variable réelle	186
	Fonctions convexes	192

§ 3	<u>DERIVEE D'UNE APPLICATION D'UN ESPACE AFFINE DANS UN AUTRE. VECTEUR DERIVE D'UNE FONCTION D'UNE VARIABLE SCALAIRE.</u>	192 quarto
	Dérivée partielle suivant un vecteur	193
	Matrice dérivée. Déterminant jacobien	195
	Insuffisance de la dérivée suivant un vecteur .	196
	Dérivée totale ou application dérivée	197
	Interprétation géométrique de l'application dé- rivée : variété différentiable et variété linéaire tangente	201
	Gradient d'une fonction réelle sur un espace euclidien	204
	Dérivée d'une application bilinéaire continue..	209
	Fonctions dérivables, fonctions continûment dérivables	211
	Espaces de fonctions dérivables	212
§ 4	<u>THEOREME DES FONCTIONS COMPOSEES</u>	214
§ 5	<u>FORMULE DES ACCROISSEMENTS FINIS</u>	232
§ 6	<u>DERIVEES D'ORDRE SUPERIEUR</u>	241
	Dérivées successives	245
	Cas d'espaces produits : Dérivabilité totale et dérivabilité partielle	250
	Espaces de fonctions m fois dérivables	251
	Dérivées d'un produit (formules de Leibnitz) ..	252
§ 7	<u>FORMULE DE TAYLOR - MAXIMA ET MINIMA</u>	257
	Applications de la formule de Taylor au calcul de dérivées de fonctions	260
	Applications à l'étude des maxima et minima ...	269

§ 8	<u>THEOREME DES FONCTIONS IMPLICITES</u>	277
	Existence de la fonction implicite	278
	Dérivabilité de la fonction implicite	283
	Fonction réciproque comme fonction implicite ..	294
	Calcul des dérivées d'ordre supérieur d'une fonction implicite	299
	Technique du changement de variables et du changement de fonction	303
§ 9	<u>VARIETES DIFFERENTIABLES</u>	305
	Définition d'une variété par une représentation paramétrique	306
	Variétés réelles et variétés complexes	318
	Variétés abstraites	319
	Espace vectoriel tangent en un point d'une va- riété d'un espace affine E de dimension N ..	323
	Espace vectoriel tangent en un point d'une variété abstraite	327
	Théorème du rang constant	327 ter
	Fonctions dépendantes et fonctions indépendantes	332
	Variétés singulières ou paramétriques	334
§ 10	<u>MAXIMA ET MINIMA LIES</u>	336
	Manière pratique de procéder pour trouver un maximum ou un minimum relatif lié	338
	Applications de la théorie des maxima liés; inégalités de Hölder et Minkowski	341
§ 11	<u>CALCUL DES VARIATIONS</u>	350 ter
	Position du problème	350 ter
	Dérivabilité de J	353
	Condition nécessaire d'extrémum	359
	Cas simple d'intégrabilité élémentaire des équations d'Euler	363